第26卷 第5期
2009年10月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 26 No. 5
Oct. 2009

文章编号:1005-3085(2009)05-0936-05

# 概率有限自动机的商和同态*

吴宗显[1,2]， 邓培民[1]， 易 忠[1]

(1- 广西师范大学数学科学学院，桂林 541004； 2- 贵阳学院数学系，贵阳 550005)

**摘 要**: 本文主要是通过概率有限自动机的有效划分来研究概率有限自动机的同态与商概率有限自动机的相关问题，得到了在同态或同构 (弱同构) 意义下概率有限自动机相互之间的关系，以及它们的商概率有限自动机的相互关系，得到了一些有意义的结果。

**关键词**: 概率有限自动机；有效划分；概率有限自动机的同态；商概率有限自动机

**分类号**: **AMS**(2000) 68Q70　　**中图分类号**: TP301.1　　**文献标识码**: A

## 1 引言

有限自动机是自动机理论的一个重要分支，它在计算机、自动控制等领域都有良好的应用，也可以作为许多离散数字系统的模型，概率有限自动机是确定有限自动机概念的推广，一些确定有限自动机理论研究的典型问题，就可以自然的转移到概率有限自动机的研究中来。在概率有限自动机的研究中，通过对输入、输出的考察和输入输出概率变换的分析，运用数学处理手段来解决问题，丰富了概率有限自动机的研究方法和内容，使概率有限自动机具有与确定性自动机不同的理论特色。由于有限自动机的商和同态在研究自动机的代数结构中有非常重要的作用，所以讨论概率有限自动机的商和同态对深刻认识概率有限自动机的代数结构及其功能是十分有意义的[1]，本文主要是通过有效划分来研究概率有限自动机的同态，和同态的概率有限自动机之间的关系，以及它们的商概率有限自动机之间的关系。

## 2 基本概念

**定义 1**[2] 一个概率有限自动机是一个四元组 $M=\langle X,Q,Y,P\rangle$，其中 $X$ 是有限输入字母表，$Q$ 是有限状态空间，$Y$ 是有限输出字母表，$P$ 是 $Q\times X\times Q\times Y\longrightarrow[0,1]$ 的输入输出概率变换映射，且满足对任意的 $q\in Q$, $x\in X$，都有

$$\sum_{(q',y)\in Q\times Y}P(q,x,q',y)=\sum_{q'\in Q}\sum_{y\in Y}P(q,x,q',y)=1.$$

此定义的意义为：当 $M$ 在状态 $q$ 下输入 $x$ 时它的状态转移到 $q'$ 输出 $y$ 的概率是 $P(q,x,q',y)$。

**定义 2** 设 $M_1=\langle X_1,Q_1,Y_1,P_1\rangle$, $M_2=\langle X_2,Q_2,Y_2,P_2\rangle$ 是概率有限自动机，若存在满射 $\alpha:X_1\longrightarrow X_2$, $\gamma:Y_1\longrightarrow Y_2$, $\beta:Q_1\longrightarrow Q_2$，对任意的

$$(q_2,x_2,q_2',y_2)\in Q_2\times X_2\times Q_2\times Y_2,\quad q_1\in\beta^{-1}(q_2),\quad x_1\in\alpha^{-1}(x_2)$$

**收稿日期**: 2007-09-18. **作者简介**: 吴宗显 (1981年12月生)，男，硕士. 研究方向：自动机理论.

*__基金项目__: 国家自然科学基金 (60473005)；广西自然科学基金 (0832103)；广西研究生教育创新计划 (2007106020701M48).

都满足

$$P_2(q_2,x_2,q_2',y_2)=\sum_{y_1\in\gamma^{-1}(y_2)}\sum_{q_1'\in\beta^{-1}(q_2')}P_1(q_1,x_1,q_1',y_1),$$

则称 $(\alpha,\beta,\gamma)$ 是 $M_1$ 到 $M_2$ 的弱同态，记为 $M_2\leq_w M_1$，若 $\alpha,\beta,\gamma$ 均为双射，则称 $(\alpha,\beta,\gamma)$ 是 $M_1$ 到 $M_2$ 的弱同构。

**定义3**[2] 设 $M_1=\langle X,Q_1,Y,P_1\rangle$，$M_2=\langle X,Q_2,Y,P_2\rangle$ 是概率有限自动机，若存在满射 $\varphi:Q_1\longrightarrow Q_2$，对任意的

$$(q_2,\,x,\,q_2',\,y)\in Q_2\times X\times Q_2\times Y,\quad q_1\in\varphi^{-1}(q_2)$$

都满足

$$P_2(q_2,x,q_2',y)=\sum_{q'\in\varphi^{-1}(q_2')}P_1(q_1,x,q_1',y),$$

则称 $\varphi$ 是 $M_1$ 到 $M_2$ 的同态，记为：$M_2\leq M_1$，若 $\varphi$ 是双射则称 $\varphi$ 是 $M_1$ 到 $M_2$ 的同构，记为：$M_2\cong M_1$。

当 $M_2\leq M_1$ 时，$M_2$ 的输入输出变换可以通过 $M_1$ 来反映。

**定义4** 设 $M=\langle X,Q,Y,P\rangle$ 是一个概率有限自动机，$\pi=\{H_i\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$ 是状态集 $Q$ 的一个划分，若对任意的 $H_i$，$H_j\in\pi$，$q_i$，$q_i'\in H_i$，$x\in X$，$y\in Y$ 都有

$$\sum_{q_j\in H_j}P(q_i,x,q_j,y)=\sum_{q_j\in H_j}P(q_i',x,q_j,y),$$

则称 $\pi=\{H_i\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$ 是 $M$ 的一个有效划分。若 $M$ 的一个有效划分是平凡划分，则称 $\pi$ 是 $M$ 的平凡有效划分。

**定义5** 设 $M=\langle X,Q,Y,P\rangle$ 是概率有限自动机，$\pi_1$，$\pi_2$ 是 $M$ 的有效划分，若对任意的 $H\in\pi_1$，都存在 $K\in\pi_2$，使得 $H\subseteq K$，则称 $\pi_1$ 是 $\pi_2$ 的一个细分，记为：$\pi_1\leq\pi_2$。

## 3　主要结果

**性质1** 设 $M=\langle X,Q,Y,P\rangle$ 是概率有限自动机，则 $Q$ 的最细划分是 $M$ 的有效划分；若 $M$ 满足对任意的 $q$, $q'\in Q$，$x\in X$，$y\in Y$，都有

$$\sum_{q_1\in Q}P(q,x,q_1,y)=\sum_{q_2\in Q}P(q',x,q_2,y),$$

则 $Q$ 的平凡划分 $\{Q\}$ 是 $M$ 的有效划分。

**引理1** 设 $M=\langle X,Q,Y,P\rangle$ 是概率有限自动机，$\pi=\{H_i\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$ 是 $M$ 的一个有效划分，则 $M/\pi=\langle X,\pi,Y,P_\pi\rangle$ 是概率有限自动机，其中 $P_\pi$ 的定义为：对任意的

$$H_i,\,H_j\in\pi,\quad x\in X,\quad y\in Y,\quad q_i\in H_i,\quad P_\pi(H_i,x,H_j,y)=\sum_{q_j\in H_j}P(q_i,x,q_j,y).$$

在本文中我们称引理1中所构造的概率有限自动机 $M/\pi=\langle X,\pi,Y,P_\pi\rangle$ ($\pi$ 是 $M$ 的有效划分) 为概率有限自动机 $M$ 的商概率有限自动机。

**引理2** 设 $M=\langle X,Q,Y,P\rangle$ 是概率有限自动机，$M/\pi=\langle X,\pi,Y,P_\pi\rangle$ 是 $M$ 的商概率有限自动机，则 $M/\pi\leq M$。

**定理1** 设$M = \langle X,Q,Y,P\rangle$是概率有限自动机，$\pi_1$，$\pi_2$是$M$的有效划分，且$\pi_1 \le \pi_2$，则$M/\pi_2 \le M/\pi_1$。

证明 令

$$\pi_1 = \{H_i \,|\, i = 1,2,\cdots,n\}, \quad \pi_2 = \{K_i \,|\, i = 1,2,\cdots,m\},$$

因为$\pi_1$，$\pi_2$是$M$的有效划分，且$\pi_1 \le \pi_2$，所以对任意的$H_i \in \pi_1$，都唯一存在$K_j \in \pi_2$，使得$H_i \subseteq K_j$。对任意的$K_j \in \pi_2$，也必定存在$H_i \in \pi_1$，使得$H_i \subseteq K_j$，否则与$\pi_1$是$M$的划分矛盾。由以上的证明可知，对任意的$K_j \in \pi_2$，都有

$$K_j = \bigcup_{j_i=1}^{m_j} H_{j_i}, \quad H_{j_i} \in \pi_1, \quad 且 \quad n = \sum_{j=i}^{m} m_j.$$

令$\varphi : \pi_1 \to \pi_2$，对任意的$H_i \in \pi_1$，$\varphi(H_i) = K_j \Leftrightarrow H_i \subseteq K_j$，由上面的证明可知$\varphi$是满射。下面验证$M/\pi_2 \le M/\pi_1$。

设$M/\pi_1 = \langle X,\pi_1,Y,P_1\rangle$，$M/\pi_2 = \langle X,\pi_2,Y,P_2\rangle$。对任意的$K_s$, $K_t \in \pi_2$，$x \in X$，$y \in Y$，任取$H_i \in \varphi^{-1}(K_s)$，则有

$$\begin{aligned}
P_2(K_s,x,K_t,y) &= \sum_{q_t \in K_t} P(q_s,x,q_t,y) \quad (\forall\, q_s \in K_s)\\
&= \sum_{H_j \subseteq K_t} \sum_{q_j \in H_j} P(q_s,x,q_j,y) \quad (K_t = \bigcup_{t_i=1}^{m_t} H_{t_i})\\
&= \sum_{H_j \subseteq K_t} P_1(H_i,x,H_j,y) \quad (q_s \in H_i \subseteq K_s)\\
&= \sum_{H_j \in \varphi^{-1}(K_t)} P_1(H_i,x,H_j,y).
\end{aligned}$$

**引理3**[2] 设$M_1 = \langle X,Q_1,Y,P_1\rangle$，$M_2 = \langle X,Q_2,Y,P_2\rangle$，$M_3 = \langle X,Q_3,Y,P_3\rangle$是概率有限自动机，且$M_2 \le M_1$，$M_3 \le M_2$，则$M_3 \le M_1$。

**定理2** 设$M_1 = \langle X_1,Q_1,Y_1,P_1\rangle$，$M_2 = \langle X_2,Q_2,Y_2,P_2\rangle$，$M_3 = \langle X_3,Q_3,Y_3,P_3\rangle$是概率有限自动机，且$M_2 \le_w M_1$，$M_3 \le_w M_2$，则$M_3 \le_w M_1$。

**定理3** 设$M_1 = \langle X,Q_1,Y,P_1\rangle$，$M_2 = \langle X,Q_2,Y,P_2\rangle$是概率有限自动机，若$M_2 \le M_1$，则存在$M_1$的商概率有限自动机与$M_2$同构。

证明 因为$M_2 \le M_1$，所以存在满射$\varphi : Q_1 \to Q_2$，使得对任意的$(q_2,x,q_2',y) \in Q_2 \times X \times Q_2 \times Y$，$q_1 \in \varphi^{-1}(q_2)$，都有

$$P_2(q_2,x,q_2',y) = \sum_{q_1' \in \varphi^{-1}(q_2')} P_1(q_1,x,q_1',y).$$

取$\pi_1 = \{\varphi^{-1}(q_2') \,|\, q_2 \in Q_2\}$，其中$\varphi^{-1}(q_2') = \{q_1 \,|\, \varphi(q_1) = q_2, q_1 \in Q_1\}$。由有效划分的定义容易验证$\pi_1$是$M_1$的有效划分。

令$M_1/\pi_1 = \langle X,\pi_1,Y,P_{\pi_1}\rangle$是$M_1$的商概率有限自动机，定义$\psi : \pi_1 \to Q_2$，对任意的

$$H_i \in \pi_1, \quad \psi(H_i) = q_i \Leftrightarrow H_i = \varphi^{-1}(q_i),$$

显然 $\psi$ 是双射，且对任意的 $(q_2,x,q_2',y)\in Q_2\times X\times Q_2\times Y$，令 $H_i=\varphi^{-1}(q_2)$，$H_j=\varphi^{-1}(q_2')$，对任意的 $q_i\in H_i$ 有

$$P_2(q_2,x,q_2',y)=\sum_{q_i'\in\varphi^{-1}(q_2')}P_1(q_i,x,q_i',y)=\sum_{q_j\in H_j}P_1(q_i,x,q_j,y)=P_{\pi_1}(H_i,x,H_j,y),$$

即 $M_1/\pi_1$ 与 $M_2$ 同构。 **证毕**

在本文中我们称定理3中的 $\pi_1$ 为由同态 $\varphi$ 诱导出的 $M_1$ 的有效划分，称 $M_1/\pi_1$ 为由同态 $\varphi$ 诱导出的 $M_1$ 的商概率有限自动机。

**定理4** 设 $M_1=\langle X,Q_1,Y,P_1\rangle$，$M_2=\langle X,Q_2,Y,P_2\rangle$ 是概率有限自动机，$M_2\le M_1$ 当且仅当存在 $M_1$ 的有效划分 $\pi_1$，使得 $M_2\cong M_1/\pi_1$。

**定理5** 设 $M_1=\langle X_1,Q_1,Y_1,P_1\rangle$，$M_2=\langle X_2,Q_2,Y_2,P_2\rangle$ 是概率有限自动机，$M_2\le_w M_1$，则存在 $M_1$ 的商概率有限自动机与 $M_2$ 弱同态，且它们的状态数相等。

**定理6** 设 $M=\langle X,Q,Y,P\rangle$ 是概率有限自动机，则在概率有限自动机同构的意义下 $M$ 的商概率有限自动机和与 $M$ 同态的概率有限自动机一一对应。

**定理7** (概率有限自动机的同态分解定理) 设

$$M_1=\langle X,Q_1,Y,P_1\rangle,\quad M_2=\langle X,Q_2,Y,P_2\rangle,\quad M_3=\langle X,Q_3,Y,P_3\rangle$$

是概率有限自动机，$M_2\le M_1$，$M_3\le M_1$，$\varphi,\psi$ 分别是 $M_1$ 到 $M_2,M_3$ 的同态，则存在 $M_2$ 到 $M_3$ 的同态 $\theta$ 满足 $\psi=\theta\varphi$ 的充要条件为：由同态 $\varphi$ 诱导出的 $M_1$ 的有效划分 $\pi_1$ 与由同态 $\psi$ 诱导出的 $M_1$ 的有效划分 $\pi$ 满足 $\pi_1\le\pi$。

证明 (充分性) 设

$$\pi_1=\{\varphi^{-1}(q_2)\,|\,q_2\in Q_2\},\quad \pi=\{\psi^{-1}(q_3)\,|\,q_3\in Q_3\},$$

定义映射 $\theta:Q_2\to Q_3$，对任意的 $q_2\in Q_2$，$\theta(q_2)=q_3\Leftrightarrow$ 存在 $q_1\in Q_1$，满足 $q_2=\varphi(q_1)$，$q_3=\psi(q_1)$。由 $\pi_1\le\pi$ 和 $\varphi,\psi$ 均为满射知 $\theta$ 是 $Q_2$ 到 $Q_3$ 的满射，且满足对任意的 $q_1\in Q_1$，$\theta(\varphi(q_1))=\psi(q_1)$。故对任意的 $(q_3,x,q_3',y)\in Q_3\times X\times Q_3\times Y$，$q_2\in\theta^{-1}(q_3)$ 有

$$\begin{aligned}P_3(q_3,x,q_3',y)&=\sum_{q_1'\in\psi^{-1}(q_3')}P_1(q_1,x,q_1',y)\\&=\sum_{q_1'\in(\theta\varphi)^{-1}(q_3')}P_1(q_1,x,q_1',y)=\sum_{q_2'\in\theta^{-1}(q_3')}P_2(q_2,x,q_2',y),\end{aligned}$$

其中 $q_1\in\psi^{-1}(q_3)$，$q_2=\varphi(q_1)$。所以 $\theta$ 是 $M_2$ 到 $M_3$ 的同态。

反之，设由同态 $\varphi$ 诱导出的 $M_1$ 的有效划分为 $\pi_1=\{\varphi^{-1}(q_2)\,|\,q_2\in Q_2\}$，由同态 $\psi$ 诱导出的 $M_1$ 的有效划分 $\pi=\{\psi^{-1}(q_3)\,|\,q_3\in Q_3\}$。对任意的 $q_2\in Q_2$，则有 $\varphi^{-1}(q_2)\in\pi_1$，任取 $q_1\in\varphi^{-1}(q_2)$，设 $q_3=\theta(q_2)$，则由 $\psi=\theta\varphi$ 知 $\psi(q_1)=\theta\varphi(q_1)=\theta(q_2)=q_3$，$q_1\in\psi^{-1}(q_3)\in\pi$，所以 $\varphi^{-1}(q_2)\subseteq\psi^{-1}(q_3)$，即 $\pi_1\le\pi$。 **证毕**

**定理8** 设

$$M_1=\langle X,Q_1,Y,P_1\rangle,\quad M_2=\langle X,Q_2,Y,P_2\rangle$$

是概率有限自动机，$M_2\le M_1$，$\varphi$ 是 $M_1$ 到 $M_2$ 的同态，若 $\pi_2=\{H_i\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$ 是 $M_2$ 的一个有效划分，则

$$\pi_1=\{K_i\,|\,K_i=\varphi^{-1}(H_i),\ H_i\in\pi_2\}$$

是 $M_1$ 的有效划分，且 $M_2/\pi_2 \cong M_1/\pi_1$，其中

$$\varphi^{-1}(H_i) = \{q_1 \in Q_1 \,|\, \varphi(q_1) \in H_i\} = K_i.$$

**定理 9** 设

$$M_1 = \langle X_1, Q_1, Y_1, P_1 \rangle, \quad M_2 = \langle X_2, Q_2, Y_2, P_2 \rangle$$

是概率有限自动机，$M_2 \leq_w M_1$，$|Y_1| = |Y_2|$，设 $(\alpha, \beta, \gamma)$ 是 $M_1$ 到 $M_2$ 的弱同态，$\pi_2 = \{H_i \,|\, i = 1, 2, \cdots, n\}$ 是 $M_2$ 的有效划分，则

$$\pi_1 = \{K_i \,|\, K_i = \alpha^{-1}(H_i),\, H_i \in \pi_2\}$$

是 $M_1$ 的有效划分，且 $M_2/\pi_2 \cong_w M_1/\pi_1$，其中

$$\alpha^{-1}(H_i) = \{q_1 \in Q_1 \,|\, \alpha(q_1) \in H_i\}.$$

## 参考文献：


[1] Holocombe W M L. Algebraic Automata Theory[M], Cambridge: Cambridge University Press, 1982

[2] Oded Maler. A decomposition theorem for probabilistic transition systems[J], Theoretical Computer Science, 1995, 145: 391-396

[3] Mora-López L, Mora J, Morales-Bueno R, *et al.* Modeling time series of climatic parameters with probabilistic finite automata[J]. Environmental Modlling & Software, 2005, 20: 753-760

[4] Qiu D W, Wang H Q. A probabilistic model of computing with word[J]. Journel of Computer and System Sciences, 2005, 70: 176-200


# The Quotient and Homomorphism of Probabilistic Finite Automata


WU Zong-xian[1,2], DENG Pei-min[1], YI Zhong[1]

(1- College of Mathematics Science, Guangxi Normal University, Guilin 541004;
2- Department of Mathematics, Guiyang College, Guiyang 550005)



**Abstract:** By using the effective partition of probability finite automata, the homomorphisms of probability finite automata and some related problems of the quotient probability finite automata are investigated. In the sense of the homomorphism or the isomorphism (weak isomorphism), the relations about the probability finite automata are studied. Moreover, the relations between their quotient probability automata are established.



**Keywords:** probability finite automata; effectively partition; homomorphism of probability finite automata; quotient probability finite automata